ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 147. № 3522. 18.

Ueber weitere Classen periodischer Lösungen des Dreikörperproblems.

Von *Karl Schwarzschild.*

1. In meinem vorigen Aufsatze (A. N. 3506) habe ich die Existenz periodischer Lösungen des Dreikörperproblems von folgender Art nachgewiesen: Ein Planetoid von verschwindender Masse und ein Planet von kleiner Masse μ bewegen sich in einer Ebene um einen Centralkörper. Die Bahn des Planeten ist kreisförmig. Die grossen Axen sind so gewählt, dass die Umlaufszeit des Planeten und die des Planetoiden ohne Rücksicht auf Störungen sich verhalten wie zwei ganze Zahlen $n_1 : n_2$. Man geht aus von einem Augenblick, in welchem der Planet die Länge des Perihels des Planetoiden hat, und wartet die Zeit ab, nach welcher der Planet zum n_1^{ten} Male das Perihel des Planetoiden, das sich in Folge der Störungen langsam verschiebt, wieder überholt. Nach dieser Zeit, welche die Periode bestimmt, hat in Folge der Commensurabilität der Umlaufszeiten der Planetoid auch wiederum nahe dieselbe mittlere Anomalie, wie zu Anfang. Wie dort gezeigt worden ist, kann man durch Veränderung der grossen Axe um Grössen von der Ordnung μ bewirken, dass die mittlere Anomalie genau zum Ausgangswerth zurückkehrt, und es verschwinden ausserdem die Störungen der grossen Axe und der Excentricität, über die ganze Periode summirt, falls dieser Ausgangswerth der mittleren Anomalie sich nur um gewisse kleine Grössen von einem der Werthe

$$l = i\frac{\pi}{n_1} \qquad i = 0, 1, 2, \cdots \qquad 2n_1 - 1$$

unterscheidet.

Sobald man annimmt, dass die Bahn des störenden Planeten eine Ellipse von beliebiger Excentricität sei, lässt sich eine periodische Lösung nicht mehr in dieser Weise construiren; denn zu den Zeiten, zu welchen der Planet das sich verschiebende Perihel des Planetoiden überholt, steht er jedesmal selbst in einem andern Theile seiner Bahn, sodass seine Entfernung vom Centralkörper und seine Geschwindigkeit vom Ausgangswerth verschieden ist. Soll in diesem Falle eine periodische Bewegung existiren, so muss ihre Periode ein genaues Vielfaches der Umlaufszeit des Planeten sein, der Planet muss zu Ende der Periode im selben Punkte seiner Bahn stehen wie zu Anfang, und es müssen die vier Elemente des Planetoiden, grosse Axe, Excentricität, mittlere Anomalie und Perihellänge zu ihren Ausgangswerthen zurückkehren. Die Forderung für die Perihellänge zwingt hier von vorneherein zur Annahme einer äusserst langen Periode. Es kann nämlich das Perihel nicht nach einer kurzen Zeit in seine Anfangslage zurückkehren, vielmehr führen es die Störungen entweder mit der Zeit um den ganzen Umkreis herum, oder sie zwingen es zur Oscillation um eine Mittellage, wobei aber die Zeit des Umlaufs resp. der Oscillation für kleine störende Massen jedesmal sehr lang ist. Indem man sich auf die sogenannten Saecularstörungen und auf Glieder zweiter Ordnung in den Excentricitäten beschränkt, bestimmt man nach Laplace und Leverrier, welcher der beiden Fälle eintritt und erkennt, dass die Zeiten, innerhalb deren das Perihel einen vollen Umlauf oder eine vollständige Schwingung ausführt, der störenden Masse μ umgekehrt proportional sind. Um nun hier die Grundlagen für eine periodische Lösung zu gewinnen, wird man zunächst die Periode T_0 des Perihels aus der Theorie der Saecularstörungen genähert zu bestimmen suchen und die Umlaufszeiten T_1 und T_2 des Planetoiden und des Planeten durch geeignete Annahme der grossen Axen so zu wählen haben, dass alle diese drei Perioden in einer noch längeren Periode T enthalten sind. Sei also:

$$T = n_0 T_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2 \tag{1}$$

wo die n ganze Zahlen bedeuten, von denen n_0 verhältnissmässig klein, n_1 und n_2 aber sehr gross sind. Dann würde, wenn man alle Störungen ausser den Saecularstörungen des Perihels vernachlässigt, offenbar das ganze System nach der Periode T in die Anfangslage zurückkehren. Es handelt sich um die Frage, ob und unter welchen Umständen bei Berücksichtigung sämmtlicher Störungen nach der Periode T genaue Rückkehr in die Anfangslage eintreten kann, und es sei mir gestattet, hier kurz den Gang meiner diesbezüglichen Untersuchung anzugeben.

2. Um die gestellte Frage beantworten zu können, bedarf man eines Verfahrens zur Integration des Dreikörperproblems, dessen Convergenzbereich sich über Zeiten von der grossen hier erforderlichen Länge erstreckt. Man erinnere sich an die Methode der Variation der Constanten in der Jacobi'schen Form, wie sie Tisserand in seiner Mecanique céleste darstellt. Es wird dort zunächst die ungestörte Bewegung betrachtet, und es werden die Bewegungsgleichungen eines Planeten in rechtwinkligen Coordinaten auf die canonische Form gebracht. Dann wird die partielle Differentialgleichung für die Hamilton'sche Hauptfunction aufgestellt und ein Integral derselben, welches drei willkürliche Constanten enthält, ermittelt. Die vollständigen Integrale des Bewegungsproblems, in diesem Falle die Gesetze der Kepler'schen Bewegung, lassen sich dann sofort unter Einführung von drei weiteren Constanten anschreiben. Diese sechs Constanten, die »canonischen Elemente«, hängen in einfacher Weise von den üblichen sechs Elementen ab. Um nun die

Störungen zu berücksichtigen, denkt man sich diese Constanten variabel. Ihre Einführung in der Weise, wie sie bei der Jacobi'schen Integrationsmethode erfolgt, hat dabei einen ausserordentlichen Vortheil: Die Gleichungen für die Veränderungen der canonischen Elemente mit der Zeit, die durch die Störungen verursacht werden, lassen sich unmittelbar angeben, sie bilden ein canonisches System, dessen Kräftefunction die Störungsfunction selbst ist.

Man kann — und davon ist schon verschiedentlich Gebrauch gemacht worden — das ganze Verfahren auf einer höheren Stufe wiederholen. Man spalte die Störungsfunction in zwei Theile, von denen der zweite nur Glieder höherer Ordnung enthält. Man bilde das canonische System für die canonischen Elemente, indem man zunächst diesen zweiten Theil der Störungsfunction vernachlässigt, und integrire das System nach der Jacobi'schen Methode. Hierbei erfolgt die Einführung von sechs neuen Constanten, die man als »absolute canonische Elemente« bezeichnen kann. Während nämlich die ursprünglichen Elemente Störungen erster Ordnung unterworfen sind, sind die »absoluten Elemente« in viel höherem Grade constant. Um schliesslich den Rest der Störungsfunction zu berücksichtigen, betrachte man auch die absoluten Elemente als variabel. In Folge ihrer Einführung durch die Jacobi'sche Methode erhält man für ihre Veränderungen mit der Zeit sofort wieder ein canonisches System, dessen Kräftefunction jener Rest der Störungsfunction ist.

Die Spaltung der Störungsfunction, die ich benutzte, war folgende. Die Excentricitäten wurden als Grössen von der Ordnung der vierten Wurzel der störenden Masse betrachtet und es wurden zunächst alle Glieder vernachlässigt, die nach dieser Voraussetzung von der Ordnung der dritten Potenz der störenden Masse wurden, also — da die Störungsfunction an sich den Factor μ enthält — die Glieder von der achten Ordnung in den Excentricitäten. Die Integration des so reducirten Problems erfolgte nach der Jacobi'schen Methode und zwar nach dem Vorbilde, welches Herr Poincaré in Capitel XI seines Werkes: »Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste« gegeben hat. Dabei war es natürlich erlaubt, die Störungsfunction durch Glieder der Ordnung μ^3 zu ergänzen, die die Integration erleichterten und die dann später von dem Rest der Störungsfunction wieder abgezogen wurden. Um das Auftreten der Zeit ausserhalb der trigonometrischen Zeichen zu vermeiden, musste bei der Integration vorausgesetzt werden, dass innerhalb des ersten Theils der Störungsfunction keine Commensurabilität, keine »kritischen« Glieder, auftreten. Es mussten also die niedersten Commensurabilitäten der Umlaufszeiten von Planet und Planetoid und zwar die Verhältnisse:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1 \pm \delta}{n_1} \qquad \delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

n_1 ganzzahlig

ausgeschlossen werden. Da ferner die Excentricitäten auch im Nenner auftraten, musste vorausgesetzt werden, dass sie weder gar zu gross noch gar zu klein seien. Es genügte, wenn sie, wie das von vorneherein vorausgesetzt war, mit $\mu^{1/4}$ vergleichbar waren. Nach diesen beiden Beschränkungen war die Integration ausführbar und sie führte zur Definition der »absoluten canonischen Elemente«. Der Rest der Störungsfunction, von dem die Aenderungen dieser Elemente abhängig waren, enthielt nunmehr μ^3 als Factor. Daraus war abzusehen, dass die Aenderungen auch für eine Periode, die zu μ umgekehrt proportional war, klein bleiben mussten. Auf das canonische Gleichungssystem, welches für dieselben gilt, kann man sich nun die einfachste Methode, die unmittelbare Entwickelung der Variablen nach Potenzen von μ, angewendet denken, wobei die Zeit bekanntlich aus den trigonometrischen Zeichen heraustritt. Auf die gewöhnlichen Störungsgleichungen angewandt ist dieses Verfahren nur für kurze Zeit convergent, hier aber erscheint die Zeit, wo sie ausserhalb der trigonometrischen Zeichen auftritt, mit einer Potenz von μ multiplicirt, und das bewirkt natürlich eine beträchtliche Vermehrung der Convergenz. Durch Anwendung des »Calcul des limites« liess sich beweisen, dass eine untere Grenze für die Zeit t, innerhalb deren diese Entwickelung nach Potenzen von μ convergirt, gegeben ist durch den Ausdruck:

$$t > \frac{K}{\mu^{5/4}}$$

wo K eine endliche Constante ist. Die Periode eines Perihelumlaufs ist gegeben durch einen Ausdruck der Form:

$$T_0 = \frac{K'}{\mu}$$

wo K' wiederum eine endliche Constante ist, die ganze Periode der gesuchten periodischen Bewegung nach (1) durch:

$$T = \frac{n_0 K'}{\mu}.$$

Es folgt:

$$t > T \frac{K}{n_0 K'} \frac{1}{\mu^{1/4}}$$

Das Convergenzbereich des Verfahrens erstreckt sich also über die Periode T hinaus, wenn:

$$\frac{K}{n_0 K'} \frac{1}{\mu^{1/4}} > 1 \qquad \mu < \left(\frac{K}{n_0 K'}\right)^4$$

ist, wenn also nur μ hinreichend klein ist.

3. Auf dieser Grundlage wurde es leicht, Anfangsbedingungen aufzusuchen, von denen aus eine periodische Bewegung von so langer Periode erfolgt.

Um dieselben bezeichnen zu können, muss daran erinnert werden, in welcher Form Laplace die Saecularstörungen der Excentricitäten und Perihele dargestellt hat. Man findet in der Mécanique céleste § 55 die Ausdrücke:

$$e \cos \omega = \sum_i \varrho_i \cos (g_i t + \eta_i)$$

$$e \sin \omega = \sum_i \varrho_i \sin (g_i t + \eta_i)$$

Hierin bedeutet e die Excentricität, ω die Perihellänge des Planetoiden, ϱ_i und η_i sind Constante, deren Werthe aus den anfänglichen Werthen e_0 und ω_0 vermöge der Gleichungen:

$$e_0 \cos \omega_0 = \Sigma \varrho_i \cos \eta_i$$
$$e_0 \sin \omega_0 = \Sigma \varrho_i \sin \eta_i$$

zu bestimmen sind. In unserem speciellen Falle werden diese Formeln, wenn man noch die Länge des Perihels des störenden Planeten zum Nullpunkt der Längenzählung nimmt:

$$\left.\begin{aligned} e_0 \cos \omega_0 &= \varrho \cos \eta + \varrho' \\ e_0 \sin \omega_0 &= \varrho \sin \eta \\ e \cos \omega &= \varrho \cos (g t + \eta) + \varrho' \\ e \sin \omega &= \varrho \sin (g t + \eta) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Dabei ist ϱ' eine Grösse, die nur von den grossen Axen und der Excentricität e' des störenden Planeten abhängt und von der Grössenordnung der letzteren ist. Man sieht, dass e und ω, wenigstens soweit die Näherung dieser Formeln reicht, nach der Zeit:

$$T_0 = \frac{2\pi}{g}$$

zum Ausgangswerth zurückkehren. Die Grösse g, welche die Periode des Perihels bestimmt, hängt in erster Näherung, wie sie Laplace giebt, vom Verhältniss der grossen Axen ab, auf ihren genaueren Werth sind aber auch ϱ und ϱ' von Einfluss.

Man kann nun solche Werthe der grossen Axe des Planetoiden und der Constante ϱ ausfindig machen, für welche die Periode des Perihels T_0 und die Umlaufszeit T_1 des Planetoiden mit der Umlaufszeit T_2 des Planeten commensurabel werden, sodass also:

$$T = n_0 T_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2$$
$$n_0,\ n_1,\ n_2 \text{ ganzzahlig}$$

wird. Dabei soll T_1 aus der sogenannten »wahren« mittleren Bewegung, welche die Saecularstörung der mittleren Länge enthält, berechnet sein und alle merklichen Störungen zweiter Ordnung in den Massen und siebenter Ordnung in den Excentricitäten berücksichtigt sein, so wie es von Leverrier in der Planetentheorie geschehen ist.

Hat man solche Werthe der grossen Axe und der Constante ϱ gefunden, so existiren Lösungen der Periode T für gewisse Anfangswerthe, welche sich von diesen Werthen nur um Grössen der Ordnung μ^2 unterscheiden, und zwar dann, wenn auch die anfängliche mittlere Länge des Planetoiden und die Constante η gewisse besondere Werthe haben. Man wähle als Anfangsmoment die Zeit eines Periheldurchgangs des störenden Planeten. Dann unterscheiden sich die betreffenden Werthe der ursprünglichen mittleren Länge l_0 und der Constanten η nur um kleine, mit abnehmendem μ verschwindende Grössen, von den Werthen eines der Systeme:

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= i \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \pi + \varepsilon_1 \pi \\ \eta &= i \cdot \frac{n_0}{n_2} \cdot \pi + \varepsilon_2 \pi \end{aligned}\right\} \quad (3)$$
$$i \text{ ganzzahlig, } \varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

Das ist das Resultat der Untersuchung.

Zwei Einschränkungen waren, wie erwähnt, dabei zu machen: es mussten e und e' und hiermit auch ϱ und ϱ' von der Grössenordnung $\mu^{1/4}$ sein und es konnten die niedrigsten Commensurabilitäten, für welche

$$n_1 = n_2 \pm \delta \qquad \delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

ist, nicht in die Betrachtung einbezogen werden.

4. Es lässt sich nun sofort die Erweiterung dieser Ueberlegungen auf einen allgemeineren Fall des Dreikörperproblems ersehen. Der Planet bewege sich nach wie vor in einer festen Ellipse, aber die Bahn des Planetoiden liege nicht mehr in derselben Ebene. Das ist ein Fall, wie er im Sonnensystem für die kleinen Planeten und den Erdmond nahezu verwirklicht ist. Es sind dann auch die Veränderungen der Neigung i und des Knotens Ω zu berücksichtigen. Der Knoten führt in Folge der Saecularstörungen allmählich einen vollen Umlauf aus (der Fall der Oscillation kann hier nicht eintreten). Die Periode dieses Umlaufs sei T_3. Man suche wie oben Werthe des Axenverhältnisses, von ϱ und von i, für welche auch T_3 mit der Periode des Perihels und den Umlaufszeiten beider Körper commensurabel wird. Es sei:

$$T = n_0 T_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2 = n_3 T_3$$
$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3 \text{ ganzzahlig.}$$

Dann existiren periodische Lösungen für Ausgangswerthe der grossen Axe, von ϱ und von i, welche sich von den erstgefundenen nur um Beträge der Ordnung μ^2 unterscheiden, wiederum unter der Voraussetzung, dass auch die anfängliche mittlere Länge und Knotenlänge und die Constante η gewisse besondere Werthe haben. Letztere Werthe unterscheiden sich nur um kleine, mit abnehmendem μ verschwindende Beträge, von den Werthen:

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= i \frac{n_1}{n_2} \pi + \varepsilon_1 \pi \\ \eta &= i \frac{n_0}{n_2} \pi + \varepsilon_2 \pi \\ \Omega_0 &= i \frac{n_3}{n_2} \pi + \varepsilon_3 \pi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$
$$i \text{ ganzzahlig. } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0 \text{ oder } 1.$$

Hier musste zum Beweise angenommen werden, dass ausser e und e' auch i von der Ordnung $\mu^{1/4}$ sei, und es mussten nicht nur, wie oben, die niedrigsten Commensurabilitäten zwischen den Umlaufszeiten beider Körper ausgeschlossen werden, sondern auch die zwischen der Umlaufszeit resp. Oscillation des Perihels und der Umlaufszeit des Knotens, nämlich die Fälle:

$$\frac{n_3}{n_0} = {}^1/_4,\ {}^1/_2,\ {}^3/_4,\ 1,\ {}^5/_4,\ {}^3/_2,\ 2,\ {}^5/_2,\ 3$$

Ueber den Zusammenhang der ganzen Schaar periodischer Lösungen, welche die Formeln (4) liefern, ist eine Bemerkung zu machen, welche in ähnlicher Weise für das System (3) gilt und auch schon bei den in meinem vorigen Aufsatze behandelten periodischen Lösungen angedeutet wurde. Als Anfangspunkt der Zeitrechnung ist der Augenblick eines

Periheldurchgangs des störenden Planeten gewählt worden. Während einer Periode finden aber n_2 solche Periheldurchgänge statt und für jeden Periheldurchgang des störenden Körpers gilt eine andere Lage und Geschwindigkeit des Planetoiden. Indem man also der Reihe nach alle diese n_2 Periheldurchgänge als Anfangsmomente benutzt, erhält man n_2 verschiedene Anfangslagen des Systems, von denen eine periodische Bewegung ausgeht. Natürlich ist es ein und dieselbe Bahncurve, welche von diesen verschiedenen Anfangslagen aus beschrieben wird. Die nähere Discussion der Formeln (4) zeigt, dass die gesammten aus der Willkürlichkeit von i und der ε hervorgehenden Anfangslagen sich auf mindestens vier und höchstens 16 verschiedene Bahncurven vertheilen, deren jede n_2 Anfangslagen enthält. Welches die genaue Anzahl der Bahncurven ist, das hängt von dem Vorkommen des Factors 2 in den Zahlen n_0, n_1, n_2, n_3 ab.

Zur weiteren Verallgemeinerung stände es auch frei, eine beliebige Lage auf einer der Bahncurven des Systems (bei welcher der störende Planet dann nicht mehr im Perihel steht) als Anfangslage zu wählen, und zugleich den Nullpunkt der Längenzählung beliebig anzusetzen.

5. Ein Beispiel wird am besten verdeutlichen, wie gering im Grunde die Specialisirung der Anfangslagen ist, für welche sich streng periodische Lösungen der hier betrachteten Art ergeben. Für den Mond ist die Umlaufszeit

des Perigäums	$T_0 = 3232.57$	Tage
des Mondes	$T_1 = 27.33166$	»
der Sonne	$T_2 = 365.2564$	»
des Knotens	$T_3 = 6793.39$	»

Zwischen diesen Zahlen besteht genähert die Commensurabilität:

$$T = 19\,T_0 = 2246\,T_1 = 168\,T_2 = 9\,T_3$$

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} 19\,T_0 &= 61418.8 \text{ Tage} \\ 2246\,T_1 &= 61364.4 \quad » \\ 168\,T_2 &= 61363.1 \quad » \\ 9\,T_3 &= 61140.5 \quad » \end{aligned}$$

Durch sehr geringe Aenderung der grossen Axe, Excentricität und Neigung des Mondes (eventuell auch der Sonnenparallaxe) könnte man diese vier Zahlen in genaue Uebereinstimmung mit $168\,T_2$, d. h. mit 168 siderischen Jahren bringen.

Es wird nun für Werthe der grossen Axe, der Excentricität und der Neigung, welche wiederum von diesen Werthen wenig verschieden sind, eine periodische Lösung mit einer Periode von 168 Jahren existiren, wenn die mittlere Anomalie, die Constante η und die Knotenlänge im Augenblick eines Periheldurchgangs der Erde nur um gewisse kleine Grössen verschieden sind von einem der Werthsysteme:

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= \frac{2246}{168}\,i\pi + \varepsilon_1\pi = (13\,i + \varepsilon_1)\,\pi + \frac{31}{84}\,i\pi \\ \eta &= \frac{19}{168}\,i\pi + \varepsilon_2\pi \\ \Omega_0 &= -\frac{9}{168}\,i\pi + \varepsilon_3\pi = -\frac{3}{56}\,i\pi + \varepsilon_3\pi \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

i ganzzahlig $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0$ oder 1

Dabei ist die Länge der Sonne im Perigäum als Nullpunkt der Längenzählung gewählt.

Bei dem Knoten erscheint das negative Zeichen, weil seine Bewegung retrograde ist.

Jede Knotenlänge:

$$\Omega_0 = \frac{k}{56}\,\pi\,,$$

wo k ganzzahlig ist, gehört zu einem dieser Systeme. Bedenkt man nämlich, dass man jedem Winkel beliebig oft 2π hinzufügen darf, so erfordert das nur die Erfüllbarkeit der Gleichung:

$$\Omega_0 = \frac{k}{56}\,\pi = \pi\,(2\,i_1 + \varepsilon_3) - \frac{3}{56}\,i\pi$$

durch ganzzahliges i_1 und i. Es folgt aber:

$$k = 56\,(2\,i_1 + \varepsilon_3) - 3\,i$$

oder, indem man: $\quad 2\,i_1 + \varepsilon_3 = i_2$

setzt: $\quad k = 56\,i_2 - 3\,i$

und diese diophantische Gleichung hat stets gewisse Lösungen:

$$i = a + 56\,k' \qquad i_2 = b + 3\,k'$$

wo a und b zwei bestimmte ganze Zahlen und k' eine willkürliche ganze Zahl ist. Da:

$$i_1 = \frac{i_2 - \varepsilon_3}{2}$$

ganzzahlig sein muss, so hat man $\varepsilon_3 = 0$ oder 1 zu wählen, je nachdem i_2 grade oder ungrade wird. Man sieht also, dass wirklich alle Werthe:

$$\Omega = \frac{k}{56}\,\pi$$

dem System angehören, und überzeugt sich leicht, dass damit auch alle möglichen Werthe der Knotenlänge erschöpft sind. Hat man einen dieser 112 verschiedenen Werthe gewählt, so ist k festgelegt, aber k', ε_1 und ε_2 sind noch willkürlich. Es folgt:

$$\begin{aligned} l_0 &= (13\,i + \varepsilon_1)\,\pi + \frac{31}{84}\,\pi\,(a + 56\,k') \\ &= (13\,i + 21 + \varepsilon_1)\,\pi + \frac{31}{84}\,a\pi - k'\frac{\pi}{3} \\ \eta &= \varepsilon_2\,\pi + \frac{19}{168}\,\pi\,(a + 56\,k') \\ &= (6 + \varepsilon_2)\,\pi + \frac{19}{168}\,a\pi + k'\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Die Willkürlichkeit von k' und ε_2 liefert sechs verschiedene Werthe für η und mithin für die Perihellänge. Wählt man einen von diesen, so ist damit auch k' festgelegt, und die Willkürlichkeit von ε_1 liefert nur mehr zwei verschiedene Werthe für l_0.

Das System (4) enthält also im Ganzen $112 \cdot 6 \cdot 2 = 8 \cdot 168 = 8\,n_2$ verschiedene Anfangslagen. Da, wie oben erläutert, immer n_2 Anfangslagen auf einer Bahncurve zu liegen kommen, so hat man es hier mit acht verschiedenen Bahncurven zu thun.

Unter allen diesen Anfangslagen würden sich solche aussuchen lassen, die der Stellung des Mondes in einem gegebenen Augenblick ziemlich nahe kämen, besonders wenn man sich auch noch eine kleine Verschiebung des Perigäums der Sonne gestatten würde, und man fände so eine streng periodische Bewegung, die sich für geraume Zeit nicht weit von der wirklichen Mondbewegung entfernte.*)

Allerdings ist zu bemerken, dass die Existenz einer solchen Bewegung zwar wahrscheinlich genug, aber doch nicht völlig sicher gestellt ist. Denn der Existenzbeweis erfordert, dass μ »hinreichend« klein ist, ohne dass diese Grenze bis jetzt numerisch angegeben werden könnte, und so ist nicht bewiesen, dass für den Mond, wo übrigens μ gleich der Sonnenmasse dividirt durch den Cubus der Sonnenentfernung zu setzen ist, diese Grösse unter der erforderlichen Grenze liegt. Uebrigens hat man sich bei allen bisherigen praktischen Anwendungen der Hill'schen und Poincaré'schen periodischen Lösungen in derselben Lage befunden.

6. Die begrenzte Convergenz des Beweisverfahrens widersetzt sich auch einem anderen Schluss, den man aus den Gleichungen (4) zu ziehen geneigt sein könnte. Man bemerkt unmittelbar, dass man um so mehr verschiedene Anfangslagen zur Verfügung hat, je höhere Commensurabilitäten man wählt, je grösser die Zahlen n_0, n_1, n_2, n_3 sind, und dass man jeder beliebigen Anfangslage, sowohl was die Werthe der grossen Axen, der Excentricitäten und der Neigung, als was die Winkel l, ω, Ω angeht, beliebig nahe kommen könnte, wenn man nur die n hinreichend vergrösserte. Wäre das nun wirklich erlaubt, so wäre damit ein Satz bewiesen, von dem auch Herr Poincaré sagt, dass er ihn für wahrscheinlich halte, ohne ihn streng begründen zu können: dass nämlich beliebig nahe bei jedem Anfangszustande ein anderer gefunden werden könne, der zu einer periodischen Bewegung von freilich im Allgemeinen sehr langer Periode führte.†) Was aber in aller Strenge behauptet werden kann, ist nur Folgendes: Für ein gegebenes hinreichend kleines μ erstreckt sich das Convergenzbereich des Beweisverfahrens über einen oder mehrere Umläufe des Perihels und des Knotens hinaus. Es kann daher die Existenz einer begrenzten Anzahl periodischer Lösungen behauptet werden, bei denen die Umlaufszeiten des Perihels und des Knotens in einer niederen Commensurabilität stehen, so dass die ganze Periode nur wenige ihrer Umläufe enthält. Nimmt nun μ ab, so wächst das Convergenzbereich wie $\mu^{-5/4}$, die Umlaufszeit von Perihel und Knoten aber nur wie μ^{-1}. Je kleiner also μ wird, um so mehr Umläufe von Perihel und Knoten wird das Convergenzbereich umfassen, um so höhere Commensurabilitäten sind also zulässig, um so zahlreichere periodische Lösungen müssen existiren und um so dichter sind die Anfangslagen gesät, die zu periodischen Bewegungen führen. Dieses Resultat ist wenigstens eine Vorstufe zu dem obigen Satze.

Auf jeden Fall sind auch die periodischen Bewegungen langer Periode, deren Existenz streng bewiesen ist, so zahlreich und die Anfangslagen, die dabei vorkommen, so wenig speciell, dass man die periodischen Lösungen nicht mehr als Ausnahmsfälle, als Curiositäten, betrachten kann.

Wien, v. Kuffner'sche Sternwarte, 1898 Juli 5. *K. Schwarzschild.*

*) Herr Perchot hat in seiner These: Sur les mouvements des Neuds et du Périgée de la Lune. Paris 1892 (Referat im Bulletin Astronomique, Bd. 11, pag. 21) auf Grund der oben erwähnten und von dort entnommenen Commensurabilitäten eine Bewegung von 168jähriger Periode für den Mond construirt, es hat sich dabei aber nicht um eine strenge Lösung gehandelt, weil a priori Unveränderlichkeit der grossen Axe vorausgesetzt wurde.

†) Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, I, pag. 82.

Württembergische und Badische Coordinaten.

Von Professor *Jordan*.

In diesem 147. Bande der Astronomischen Nachrichten S. 125-142 ist eine längere Abhandlung über Coordinatenberechnung von Herrn Prof. Hammer veröffentlicht worden, in welcher meine Arbeiten auf diesem Gebiete mehrfach citirt sind, weshalb ich mir erlaube, hier ebenfalls meine Ansicht hierüber auszusprechen, zumal es sich um Anwendung auf älteres württembergisches und badisches Material handelt, das wohl kaum einem Anderen ebenso bekannt und geläufig sein dürfte, wie dem Schreiber dieses, vermöge seiner langjährigen Beschäftigung damit in Stuttgart und Karlsruhe bis 1881.

Die Hauptresultate der Landesvermessungen von Württemberg und Baden sind niedergelegt in rechtwinkligen sogenannten Soldner'schen Coordinaten, deren Theorie als bekannt vorauszusetzen ist.

Die württembergischen Coordinaten sind veröffentlicht in dem amtlichen Werke »Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg etc. von Kohler, Stuttgart 1858«, aus welchem wir von S. 171-283 folgende 6 Punkte entnehmen:

Württembergische Coordinaten.

	x (württ. Fuss)	y (württ. Fuss)	
1) Mannheim Sternwarte	+375948.62	−149528.71	(1)
2) Katzenbuckel	+369283.70	− 2320.63	
3) Durlach Warte	+185777.58	−144422.26	
4) Hornisgrinde	+ 34789.55	−218515.23	
5) Tübingen Sternwarte	0.00	0.00	
6) Hohentwiel	−293058.26	− 60676.63	

Diese Coordinaten x, y sind mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten vom Nullpunkt Tübingen gezählt, und zwar gemessen in württembergischen Fuss, indem 1 Fuss = 126.97 Pariser Linien = 0.2864226161 Meter (log = 9.4570073·071). Die Vermessung ist nicht wie sonst im Meereshorizont genommen, sondern in der Höhe h = 840 Pariser Fuss = 272.865 Meter über dem Meere, wofür $\log\left(1+\frac{h}{r}\right) = 0.0000185{\cdot}744$, was zu dem obigen Verwandlungslogarithmus addirt giebt log = 9.4569887·327.